

Nome: _____ Cognome: _____ Orale: I appello II appello
Modalità: in presenza da remoto

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1-4: risposta giusta = 1, risposta omessa = 0, risposta sbagliata = -0.5.
Esercizi 5-6: punti 0-8

Esercizio 1 Si consideri la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di termine generale $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2^n + n}{3^n - \sqrt{n}}$

- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è inferiormente limitata V F
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente V F
- L'insieme $\{a_n : |a_n| \leq \frac{1}{100}\}$ non ammette massimo V F
- Per ogni $N \in \mathbb{N}$ risulta $\sup_{n \geq N} a_n > 0$ V F

Esercizio 2 Siano $f(x) = \arctan(x)$, $g(x) = e^x$, $h(x) = g(f(x)) - f(g(x))$

- $\exists x_0 \in [0, 1]$ tale che $h(x) \geq h(x_0) \forall x \in [0, 1]$ V F
- L'equazione $f(g(x)) = c$ ammette soluzione per ogni $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ V F
- $x = 0$ è un punto di discontinuità per $f(g(x))$ V F
- $\int_0^1 \frac{g(f(x))}{1+x^2} dx < e - 1$ V F

Esercizio 3 Si considerino le funzioni $f(x) = x|x|$ e $g(x) = \sin(x + x^3) - \sin(x)$

- $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $(f + g)'(c) = 0$ V F
- $g(x) = x^3 + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$ V F
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ V F
- $g^{(4)}(0) > 0$ V F

Esercizio 4 Siano $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ ed $F(x) = \int_0^x \sin(f(t)) dt$

- $F(x)$ è derivabile in \mathbb{R} V F
- $x = -1$ è un punto di minimo assoluto per $F(x)$ V F
- $F(x^2)$ risulta convessa in \mathbb{R} V F
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ V F

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|\ln(x^2)| - 1}$$

1. determinare il dominio di f e studiarne il segno;
2. studiare gli asintoti, continuità e derivabilità ;
3. studiare punti di max, min e flessi evidenziando gli eventuali intervalli in cui la funzione f e' convessa;
4. disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 6 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + \cos(t)y(t) = -\cos(t) \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Determinare:

1. la soluzione generale dell'equazione omogenea;
2. la soluzione generale dell'equazione non omogenea;
3. la soluzione del problema di Cauchy;
4. calcolare $y(-\frac{\pi}{2})$.